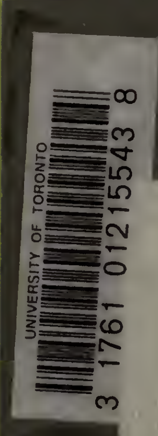
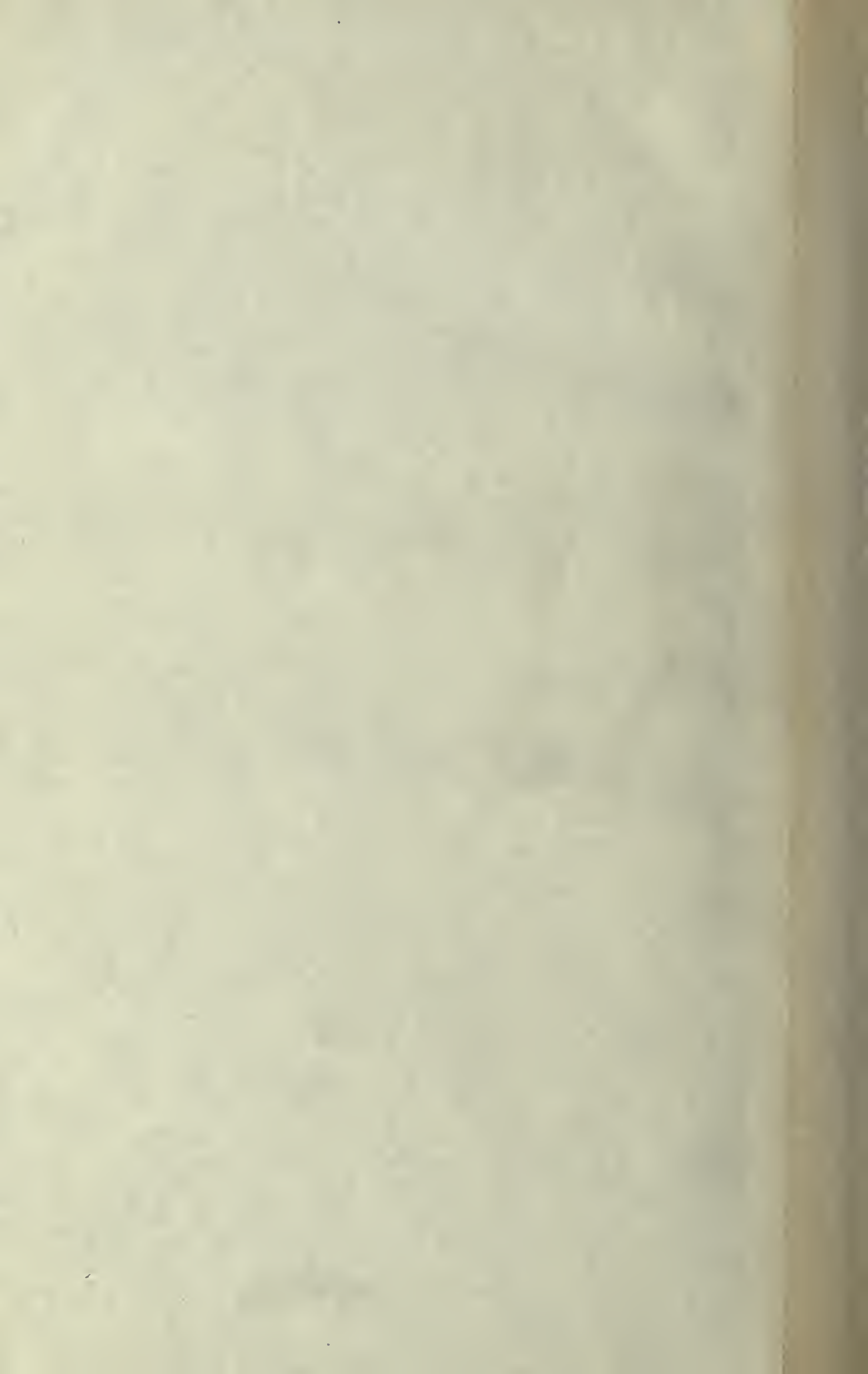


Lipps, Gottlob Friedrich
Die logischen Grundlagen
des mathematischen
Funktionsbegriffs







Die logischen Grundlagen
des
mathematischen Funktionsbegriffs.

Inaugural-Dissertation

zur

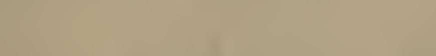
Erwerbung der philosophischen Doctorwürde

gebilligt von der

philosophischen Facultät der Universität Leipzig

verfasst von

Gottlob Fr. Lipps.



Zweibrücken.
Druck von AUGUST KRANZBÜHLER.
1888.

§ 1. Eine zielbewusste Untersuchung mathematischer Grundbegriffe macht eine vorhergehende Verständigung über die Auffassung der Mathematik selbst nöthig.

Es besteht diese, so wie sie als Produkt geschichtlicher Entwicklung vorliegt, aus einer Reihe von Disciplinen, die zum Theil selbständig neben einander stehen, zum Theil in einander übergreifen oder sich umfassen, theils sich auf einander stützen, theils sich an einander lehnen und sich ergänzen, die dabei die Berechtigung zu ihrer einheitlichen Zusammenfassung durch den jeder einzelnen zu Grunde liegenden Begriff des Quantums erhalten, während ihre relative Selbständigkeit durch die Verschiedenheit in der Auffassung und Behandlung dieses Begriffs bedingt ist.*)

In der Auffassung dieses Systems mathematischer Disciplinen lassen sich nun zwei verschiedene Richtungen unterscheiden, die zwar nicht scharf geschieden, auch nicht einseitig vertreten werden, doch aber je nach dem Vorwiegen der einen oder anderen auf die Grundlegung, Weiterführung und Vollendung der einzelnen Theile der Mathematik von wesentlichem Einflusse sind.

Wie nemlich dem ersten Anstoss zu mathematischen Untersuchungen ohne Zweifel praktische Bedürfnisse gegeben haben, wie ferner, bald nachdem die so hervorgerufenen Forschungsgebiete selbständige Bedeutung erlangt hatten, bei ihrer Weiterführung Einfachheit und Symmetrie leitende Gesichtspunkte wurden, die zu einer kunstvollen Gestaltung der Lösung mathematischer Probleme Anlass gaben, so scheint manchen das ganze Gefüge der mathematischen Disciplinen vorzugsweise durch die Rücksicht auf praktische Verwerthung und künstlerische Vollendung bestimmt zu sein. Diesen ist die Mathematik sowohl willkommenes Hilfsmittel zu anderweitigen Untersuchungen, als auch ein nach den Regeln der

*) Aehnlich sagt z. B. Euler: „Es gibt sehr verschiedene Arten von Grössen, die sich nicht wohl aufzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Arten der Mathematik, deren jede mit einer besonderen Art von Grössen beschäftigt ist.

Vollständige Anleitung zur Algebra I. Theil pag. 1.

Einfachheit und Symmetrie gegliederter kunstreicher Bau. Diesem Standpunkte ist die Eleganz in den Methoden mathematischer Beweisführung zu danken, die namentlich seit Legrange zu grosser Blüthe gelangt ist; ihr aber auch die Scheidung zwischen mathematischen und logischen Schwierigkeiten bei der Grundlegung der einzelnen Disciplinen,*) wo dann die logischen Schwierigkeiten als eigentlich nicht zur Sache gehörig bei Seite gelassen, die mathematischen Schwierigkeiten aber durch klare, in sich widerspruchslose Definitionen der Grundbegiffe bereinigt werden, während eine Untersuchung über die logischen Grundlagen dieser Begriffe kein Interesse bietet.

Daneben verlangt eine andere Auffassungsweise, die in der Mathematik zunächst eine auf logische Prinzipien gegründete Wissenschaft sieht, unabweisbar ihr Recht. Unbeirrt von praktischer Verwerthung und Eleganz prüft sie die einzelnen Disciplinen auf ihren logischen Gehalt und bestimmt ihre Weiterführung durch logische Gesichtspunkte; ohne Rücksicht auf den kunstvollen Bau der mathematischen Untersuchungsgebiete sucht sie nach dem logischen Band, das diese umschlingt, um eine systematische Gliederung derselben möglich zu machen und erforscht den logischen Grund, auf dem sie stehen, um ihre Einfügung in das Gesammtgebiet wissenschaftlicher Bestrebungen zu gewinnen. Kunstgriffe und Paradoxa können nur vorübergehend existiren. Jene sucht sie durch logisch begründete Methoden zu ersetzen, diese durch tiefer gehende begriffliche Erörterungen aus dem Wege zu räumen. Eine Untersuchung über die logischen Grundlagen der Begriffe aber ist nunmehr sowohl interessant als auch notwendig: interessant, weil sie darlegt, in welcher Weise sich allgemeine logische Begriffe durch ihre Specialisirung auf das exakte Gebiet der Mathematik gestalten; nothwendig, weil sie das Zufällige in der Bildung eines Begriffs vom Wesentlichen scheidet und geeignet ist, die weitere Entwicklung eines Begriffs von verkehrten Bahnen ab, in richtige zu leiten.

§ 2. Versucht man nun, gestützt auf solche Auffassungsweise der Mathematik, die logischen Grundlagen ihrer Begriffe zu untersuchen, so bieten sich hiezu zwei wesentlich

*) Diese Scheidung wird häufig ln den Vorlesungen über Diff.- und Integr.-Rechnung vollzogen; es findet sich dieselbe auch bei Snell: Einleitung in die Differential- und Integralrechnung.

verschiedene Methoden dar, von denen jede eigenthümliche Vortheile besitzt.

Zunächst scheint es wohl am einfachsten, die historische Entwicklung des Begriffs zum Ausgangspunkt der Untersuchung zu machen, um in den einzelnen Ruhepunkten seiner Entwicklung die logischen Fundamente nachzuweisen, auf denen er steht, und so in allmählichem Weiterschreiten die logischen Grundlagen des Begriffs, wie er als Resultat historischer Entwicklung vorliegt, festzustellen. Abgesehen von dem historischen Interesse, das eine solche Untersuchung für sich in Anspruch nimmt, ist sie geeignet einen lehrreichen Einblick in die eigenthümlichen Schwierigkeiten zu gewähren, die der Entwicklung eines Begriffs im Wege stehen, und ein Verständniss für den Grad der Ausbildung zu ermöglichen, den der Begriff am Schlusse des historischen Entwicklungsganges gewonnen hat. Jedoch ist dieser Weg zur Erreichung des vorgesteckten Zieles zu lang.

Kürzer ist es, nach einer vorläufigen Definition des Begriffes, die seinen Gehalt so, wie er sich historisch gebildet hat, wiedergibt, den ihm entsprechenden allgemeinen logischen Begriff aufzustellen, um diesen in Gestalt einer logischen Genese aus den empirisch gegebenen Grundlagen des Bewusstseins zu gewinnen und aus ihm die specifisch mathematischen Gestaltungen abzuleiten. Das Eigenthümliche dieser Methode besteht darin, dass man sich einen Zustand des Bewusstseins denkt, in dem die ursprünglichen psychologischen Grundlagen vorhanden sind, der logische Apparat ausgebildet und in seinen einzelnen Theilen bekannt ist und nun mit Wissen und Willen in Thätigkeit gesetzt wird, um aus jenen empirischen Grundlagen den zu Anfang ins Auge gefassten Begriff zu erzeugen. Die logischen Grundlagen ergeben sich bei dieser Methode ganz unmittelbar durch Beachten der logischen Grundbegriffe und der Denkgesetze, die bei seiner Erzeugung Verwendung finden; während Willkürlichkeiten und Erschleichungen keine Gelegenheit haben sich einzunisten, da blos logischer Zwang der Führer ist, dem wir uns anvertrauen, der dafür bürgt, dass alle Zufälligkeiten des historisch gewordenen Begriffs als solche erkannt und alles Dunkel, das diesen belastet, aufgehellt wird. Bei diesen Vortheilen bedarf die Berechtigung der Methode keines besonderen Nachweises, um so weniger, da durch ihre Befolgung ja nur in einem einzelnen Falle das geschieht, was für das

Gesammtgebiet der Wissenschaften zu leisten anerkanntes Bedürfniss ist, nämlich ihre systematische Gliederung aus ursprünglich gegebenen psychologischen Grundlagen durch bewusste Anwendung der logischen Denkgesetze zu gewinnen.

I. Der Begriff der logischen Abhängigkeit.

§ 3. Indem ich nun dazu schreite die logischen Grundlagen des mathematischen Funktionsbegriffs nach der zuletzt dargelegten Methode zu untersuchen, wird es zunächst meine Aufgabe sein, diesen Begiff sammt seinem logischen Aequivalente festzustellen, sodann aus dem empirisch gegebenen Thatsachenbestand des Bewusstseins die psychologische Grundlage des Begriffs zu gewinnen und aus dieser unter Angabe der zur Verwendung kommenden geistigen Thätigkeiten den logischen Begriff abzuleiten.

Welches ist nun der mathematische Funktionsbegriff? — Nachdem Descartes gelehrt hatte, geometrische Probleme in analytisches Gewand zu kleiden, und dadurch an Stelle geometrischer Construction das Operiren mit analytischen Ausdrücken gesetzt war, zeigte sich bald das Bedürfniss solche Ausdrücke mit einem gemeinsamen Namen zu bezeichnen. Diesem Bedürfnisse entsprechend führte Joh. Bernoulli*) den Namen „Funktion" ein, der von da ab einen fundamentalen Begriff der Analysis bezeichnete, den Euler**) durch folgende Worte definirte:

„Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus."

Als dann Probleme der mathematischen Physik, insbesondere das der Saitenschwingungen, dazu führten, die Abhängigkeit der Ordinaten beliebig gezeichneter Curven von den ihnen zugehörigen Abscissen als „willkürliche" Funktion zu bezeichnen und Fourier's Entdeckung solche Abhängigkeiten durch trigonometrische Reihen darstellen lehrte, wurde namentlich durch Dirichlet's***) Arbeiten über die Fourier'schen

*) Opera omnia. t. II. p. 241.
**) Introductio in analysin infin. 1748. t. I. pag. 4.
***) Repert. d. Physik, herausg. v. Dove t. I 1837 pag. 152.

Reihen der Begriff der Funktion als der einer blosen Abhängigkeit zweier einander zugeordneten Grössenreihen definirt. Diese Definition des Funktionsbegriffs ist die nunmehr in mathematischen Vorlesungen und Lehrbüchern herrschende, und sein Gehalt wird vollkommen erschöpft, wenn man die Funktion kurz als eine „tabellarische“ Zuordnung zweier Grössenreihen definirt, der Art, dass jedem Gliede der einen Reihe ein oder mehrere Glieder der zweiten Reihe zugehören.

Der Inhalt dieses Begriffs umfasst drei Merkmale, die darin bestehen, dass:

1. eine Abhängigkeit besteht zwischen den Gliedern der einen Reihe und den Gliedern der anderen, dass 2. diese Abhängigkeit eine wechselweise ist, indem ebenso wie den Gliedern der ersten Reihe solche der zweiten, so auch den Gliedern der zweiten Reihe solche der ersten entsprechen; dass es 3. Grössenreihen sind, die in gegenseitiger Abhängigkeit stehen.

Blos das letzte dieser Merkmale ist ein specifisch mathematisches. Der aus ihnen zusammengesetzte mathematische Begriff findet somit sein logisches Aequivalent in dem aus den beiden ersten Merkmalen gebildeten Begriffe, der kurz als wechselweise Abhängigkeit von Objecten des Denkens definirt werden kann, indem an Stelle der Grössen allgemeine Objekte des Denkens treten.

§ 4. Es gewinnt nun aber das Denken die Gegenstände, an denen es sich bethätigt, aus dem empirisch gegebenen, psychologischen Material, das aus einzelnen, selbständig, für sich erfassten Inhalten des Bewusstseins besteht, deren Ablösung aus dem anfänglich doch wohl als Ganzes gegebenen Thatsachenbestand des Bewusstseins sich in folgender Weise vollziehen mag.

Die Veränderlichkeit der noch nicht bewusster Weise in ihrer Selbständigkeit erfassten Bestandtheile jener Gesammtheit von Bewusstseinszuständen wird einen Widerstreit zwischen früheren durch das Gedächtniss fixirten und später sich aufdrängenden Gesammtszuständen des Bewusstseins hervorrufen, in Folge dessen die constant gebliebenen Elemente sich verstärken, die veränderten sich schwächen und verdrängen. Jene verstärkten Elemente werden so mehr und mehr in ihrer relativen Selbständigkeit erfasst und der Gesammtheit der übrigen gegenüber abgegrenzt, so dass diese den dunkeln Hintergrund bilden, von dem sich jene ablösen.

Ist nun so die Analyse des Bewusstseinsganzen, veranlasst durch die Veränderlichkeit der einen und die relative Constanz der andern Elemente bis zu einem Ruhepunkte gelangt, so kann zweierlei eintreten: es kann eine Verschiebung und Veränderung innerhalb eines schon selbständig und für sich bestehend erfassten Theiles des Bewusstseins zu einer weitergehenden Analyse verleiten, so dass an Stelle der einheitlichen Erfassung eine Mehrheit getrennter Bewusstseinsinhalte tritt, deren ursprüngliche Zusammengehörigkeit jedoch nicht vergessen wird; es kann aber auch ein constantes Nacheinander oder Miteinander von schon zertrennten Bewusstseinsinhalten zu einer rückwärts schreitenden Synthese derselben Anlass geben, so dass auch in dieser Weise wieder einzelne Inhalte des Bewusstseins als zusammengehörig erfasst werden. Durch analytische und synthetische Thätigkeit des Geistes also kann sich im Bewusstsein der Begriff der Zusammengehörigkeit seiner Inhalte bilden, dessen Wesen darin besteht, dass nach dem Auftauchen einer oder mehrerer dieser Inhalte auch die Reihe der übrigen im Bewusstsein sich einstellt. Die Analyse ist eine elementare, d. h. eine solche, die ein zusammengesetztes Ganze in seine Elemente zergliedert; die Synthese ist eine blos reproduktive, d. h. eine solche, die getrennte Theile einfach wieder zusammenfügt.*) Beide bewirken eine blos äusserliche, entweder zufällige oder durch Aehnlichkeit und constantes Nacheinander sowie Miteinander bedingte, gewohnheitsmässige Zusammenfassung.

§ 5. Diese psychologische Zusammenfassung von Bewusstseinsinhalten ist aber der Grund und Boden, aus dem der Begriff der Abhängigkeit von Objecten des Denkens hervorwächst. Wenn sich nämlich nun thatsächlich das Denken an solchen einzelnen Inhalten des Bewusstseins oder an Systemen solcher Inhalte bethätigt, so werden diese in ihrer Totalität unter gleichzeitiger bewusster Scheidung ihrer Elemente von uns erfasst. Eine gegebene psychologische Abhängigkeit wird alsdann daraufhin geprüft, ob nun auch das Denken des einen Objektes das Denken des andern bedingt. Es ist dies der Fall, wenn die durch das Denken erfassten Elemente des einen Objektes unter den Elementen des andern Objektes sich finden oder wenn beide Objekte

*) Eine ausführliche Erörterung der verschiedenen Entwicklungsstufen der Analyse und Synthese findet sich in Wundt's Logik Bd. II, pag. 1—10.

Elemente besitzen, die das Denken als gemeinsame erkennt.

Das Charakteristische in diesem Uebergange von einer blos psychologischen Zusammenfassung zu einer logischen Abhängigkeit besteht also darin, dass aus den zunächst als solchen zusammengestellten Bewusstseinsinhalten einzelne Merkmale als diejenigen hervorgehoben werden, welche diese Zusammenfassung zu einer denknotwendigen machen. Dieses Herausgreifen einiger Merkmale führt zu einer begrifflichen Erfassung der psychologischen Bestandtheile des Bewusstseins, indem diese blos insofern als sie die Träger jener Merkmale sind Beachtung finden und durch andere, dieselben Merkmale enthaltenden Bewusstseinsinhalte vertreten werden können, während diese Merkmale im Denken von ihren Trägern losgeschält werden und, durch Worte bezeichnet, eine selbständige Bedeutung als Begriffe erhalten.

Die früher elementare Analyse wird hier zur logischen, die mit Rücksicht auf einen denknothwendigen Zusammenhang Zusammengesetztes zergliedert; die früher blos reproduktive Synthese wird nun zur produktiven, da aus der logisch motivirten Zusammenfügung neue Erkenntniss resultirt, die bei der vorherigen Vereinigung nicht vorhanden war.

Haben nun aber psychologische Beziehungen Anlass gegeben Begriffe zu bilden und deren logischen Zusammenhang zu erforschen, so kann andererseits dieses so gewonnene logische Material zu theoretischen Disciplinen das Fundament liefern, die es sich zur Aufgabe machen, die Natur solcher Begriffe zu studiren und die möglichen, denknothwendigen Beziehungen, in die jene treten können, unabhängig von aller Erfahrung, klar zu stellen. Solche Theorieen bewirken alsdann die Möglichkeit, psychologisch vorerst noch nicht vorhandene Beziehungen aufzudecken und psychologisch verwickelte stufenweise in logische Abhängigkeiten umzuwandeln.

§ 6. Zur näheren Beleuchtung der Art und Weise, wie sich solche Uebergänge von blos psychologischen Zusammenfassungen zu logisch begründeten Abhängigkeiten vollziehen und die hieraus gewonnenen Begriffe zur Grundlage theoretischer Untersuchungen werden können, mag folgendes Beispiel dienen:

Schon in frühen Zeiten hat sich im Bewusstsein der Menschen die Gruppe der Planeten als Wandelsterne von der Gesammtheit der übrigen durch Constanz ihrer gegenseitigen Entfernungen charakterisirten Sterne geschieden. Ihre psycho-

logische Zusammenfassung war schon durch die anfänglich gemeinsame Betrachtung aller Sterne bedingt. Der denkende Geist verlangte nun aber Gründe, die solches Zusammenfassen rechtfertigen sollten. Dies gab Anlass zu den komischen Systemen. Hypothesen wurden aufgestellt, um dem Denken ein einheitliches Erfassen des Planetenkomplexes zu ermöglichen. Von der direkten Beobachtung ausgehend, wurden Sphären um die ruhende Erde in Umschwung gesetzt, dann, als dies nicht genügte, wurden excentrische Kreisbahnen geschaffen und Epizykel auf Epizykel gehäuft. Doch immer noch ergab sich kein Einklang mit der Beobachtung. Dies veranlasste neue Hypothesen zu ersinnen: so lies Copernicus die Sonne ruhen und die Erde sich bewegen, Kepler ersetzte den Kreis durch die Ellipse und Newton fand das die Planeten gemeinsam umschlingende Band im Gesetze von der Gravitation. Jetzt erst war eine einheitliche, logisch wohlbegründete Beziehung gegeben auf Grund des Begriffs der in die Ferne wirkenden Kraft. Dieser Begriff würde nun die Basis einer Theorie, welche die Bewegungen von n beliebigen, mit beliebigen Anfangsgeschwindigkeiten ausgerüsteten und dem Gravitationsgesetze unterworfenen Massenpunkten zum Gegenstande ihrer Untersuchungen hat, deren Vollendung es ermöglicht, allenthalben, wo ähnliche Bewegungen beobachtet werden, diese auf die Wirkungen solcher Kräfte zurückzuführen, und sie so in eine logisch berechtigte Abhängigkeit zu bringen. Diese letztere ist in diesem speciellen Falle eine derartige, dass in jedem Zeitmomente der Bewegungsimpuls, den ein Punkt des Systems erhält, völlig durch die (n—1) übrigen Punkte bestimmt ist.

§ 7. Im allgemeinen ist die Natur der logischen Abhängigkeiten eine sehr verschiedenartige. Doch lassen sich dieselben in zwei Klassen bringen. Der einen Klasse gehören alle diejenigen Abhängigkeiten zu, welche aus dem wissenschaftlichen Erfassen einer empirisch gegebenen Zusammengehörigkeit resultiren; während die andere alle diejenigen Abhängigkeiten umfasst, welche erst logisch festgestellt werden, indem sie sich bei der Untersuchung vorhandener Begriffe aus deren Natur ergeben.

Fasst man diese zuletzt genannte Klasse von Abhängigkeiten ins Auge und trifft man dabei noch die Bestimmung, dass die solchen Untersuchungen unterworfenen Begriffe „wechselweise“ von einander abhängig sein sollen, so treten

dadurch alle diejenigen Abhängigkeiten in den Vordergrund, die aus der Untersuchung *coordinirter* Begriffe die einem und demselben allgemeinen Begriffe untergeordnet sind, oder verschiedener *Erscheinungsformen* eines und desselben Begriffes resultiren.

Damit ist nun das allgemeine logische Aequivalent des mathematischen Funktionsbegriffs gewonnen. Es erhellt zugleich, dass eine von logischen Gesichtspunkten beherrschte Erfassung dieses mathematischen Begriffs naturgemäss und einfach aus der allseitigen und einheitlichen Erfassung der Grundbegriffe sich ergibt, aus deren Bearbeitung die mathematischen Disciplinen resultiren.

Zur Ableitung dieser Begriffe soll nun geschritten werden, um so die Merkmale und Gestaltungen des mathematischen Funktionsbegriffs zu gewinnen.

II. Die Merkmale und primitiven Gestaltungen des mathematischen Funktionsbegriffs.

§ 8. Gehen wir zu diesem Zwecke auf den Thatsachenbestand unseres Bewusstseins zurück, so finden wir dessen Inhalte zunächst als für sich bestehende, von der Gesammtheit der übrigen Bewusstseinszustände abgegrenzte, psychologischen Thatsachen vor. Fassen wir nun aber eine ganze Reihe solcher Bewusstseinsinhalte ins Auge, so bieten sich diese in einem *Nacheinander* oder *Miteinander* geordnet dar. Dabei ist zu bemerken, dass das Miteinander ein *Ineinander* oder *Aussereinander* sein kann. Von vorn herein sind nun zwei wesentlich verschiedene Formen des Miteinander und Nacheinander zu unterscheiden. Ein System von Bewusstseinsinhalten kann nämlich derart sich zusammenordnen, dass jeder einzelne Inhalt für sich erfasst und nur durch Vermittlung anderer, nicht diesem Systeme zugehöriger Inhalte mit den übrigen Gliedern des Systems zusammengefasst wird. Man kann dies ein *discretes Nacheinander oder Miteinander* nennen. Es kann sich aber auch jenes System von Bewusstseinsinhalten der Art zusammenordnen, dass die einzelnen Inhalte zwar für sich erfasst werden können, aber ohne Vermittlung fremder Inhalte zu einem einzigen

Bewusstseinsinhalt zusammenschmelzen, der nun als zusammenhängendes Ganze von der Gesammtheit der übrigen Bewusstseinsinhalte sich abgrenzt. Man kann dies ein continuirliches Nacheinander oder Miteinander nennen.

Die Worte continuirliches und discretes Nacheinander oder Miteinander sind Bezeichnungen für psychologische Thatsachen, für die Ordnung nämlich, in der sich die Bewusstseinsinhalte präsentiren; sie bedürfen somit keiner weiteren Erläuterung. Jedoch verdienen sie volle Beachtung, da sie die psychologische Grundlage bezeichnen, aus welcher die Begriffe gewonnen werden, die zunächst den Gegenstand mathematischer Untersuchungen bilden.

§ 9. Der eine dieser Begriffe wird aus der begrifflichen Erfassung eines discreten Systems von nacheinander oder miteinander gegebenen Inhalten des Bewusstseins gewonnen. Abstrahirt man bei einem solchen Systeme von jeder besonderen Beschaffenheit der einzelnen Inhalte, so wird jeder dem andern gleichberechtigt und es bleibt allein das Merkmal, dass eine Reihe einzelner, von einander getrennter — oder mit andern Worten — dass eine „discrete Mannigfaltigkeit" von Bewusstseinsinhalten vorhanden ist. Jede solche „discrete Mannigfaltigkeit" ist einer andern gleich oder nicht gleich zu setzen, je nachdem eine gleiche oder verschiedene Anzahl von Bewusstseinsinhalten in ihr sich findet. Indem nun eine solche Anzahl durch ein besonderes Zeichen fixirt und somit von jeder andern Anzahl unterscheidbar gemacht wird, wird dieses Zeichen als charakteristisches Merkmal einer jeden discreten Mannigfaltigkeit eingeführt. Jene Zeichen werden aber Zahlen genannt. Der Begriff einer discreten Mannigfaltigkeit deckt sich somit vollkommen mit dem Begriffe einer Zahl als Anzahl von Bewusstseinsinhalten. Es ist dabei völlig gleichgültig in welcher Weise eine solche Mannigfaltigkeit zusammengefasst und alsdann durch eine Zahl bezeichnet wird, ob dabei jedes einzelne Glied des Systems für sich erfasst und einzeln zur Gesammtheit hinzukommt, oder ob erst einzelne Gruppen gebildet werden, deren Zusammenfassung die durch eine Zahl charakterisirte Mannigfaltigkeit constituirt. Damit ist das Wesen des Begriffs der discreten Mannigfaltigkeit und der diese kennzeichnenden Zahl völlig erschöpft. Die Bedeutung der Zahl besteht somit darin, dass sie als Zeichen einer individuellen Mannigfaltigkeit dient, dass sie ferner mit andern Zahlen, die andere

individuelle Mannigfaltigkeiten bezeichnen, zusammengefasst werden kann, die durch diese Zusammenfassung eine neue Mannigfaltigkeit discreter Elemente charakterisiren. Man nennt diese Zusammenfassung Addition. Sie ist die primitive Operation, auf die sich die theoretischen, auf den Begriff der discreten Mannigfaltigkeit oder der Zahl gegründeten Untersuchungen stützen.

§ 10. Während nun so das discrete psychologische Nacheinander und Miteinander den Begriff der Zahl erzeugt und das Fundament zu einer Reihe auf diesem Begriffe bassirter, mathematischer Disciplinen liefert, bietet die Beachtung des continuirlichen Nacheinander und Miteinander die Gelegenheit einen zweiten Begriff aus der psygologischen Ordnung der Bewusstseinsinhalte zu gewinnen. Abstrahirt man nämlich wieder von jeder Qualität der continuirlich aneinander gereihten und so zu einem Ganzen verschmolzenen Inhalte des Bewusstseins, so bleibt einzig und allein die Form der Abgrenzung dieses aus unmittelbar zusammenhängenden Theilen bestehenden Inhaltes von dem gesammten, übrigen Bewusstsein als charakteristisch bestehen, während die Art und Weise, wie sich der Inhalt aus seinen Theilen zusammensetzt, völlig gleichgültig bleibt, da ja diese sich zu einem psychologisch einheitlichen Ganzen verschmelzen. Die Indifferenz eines solchen continuirlichen Systems von Bewusstseinsinhalten gegen die Sonderung in einzelne, das System constituirende Inhalte bedingt eine unendlich mannigfaltige Möglichkeit der Sonderung, die in gleicher Weise jedem solchen continuirlichen, zu einem Ganzen verschmolzenen Systeme eigenthümlich ist. Ihre individuellen Unterschiede bestehen lediglich in der Verschiedenheit der Umgrenzungen, die ihre Existenz bedingen. Ein Erfassen der charakteristischen Merkmale solcher Umgrenzungen kann nur auf Grund der Vergleichung verschiedener, im Bewusstsein vorhandener continuirlicher Systeme von Bewusstseinsinhalten geschehen, was nun die Gründung einer Theorie auf den aus dem continuirlichen Nacheinander und Miteinander der Bewusstseinsinhalte gewonnene Begriff der Umgrenzung solcher Inhalte ermöglicht. Ist diese Umgrenzung die eines continuirlichen Nacheinander, so ist sie durch ein Zeitintervall bestimmt; wird ein continuirliches Miteinander umgrenzt, so ist damit ein extensives also räumliches oder intensives Quantum gegeben, je nachdem das Miteinander

ein Auseinander oder Ineinander ist. Da nun aber Zeitumgrenzungen als Intervalle in einer Geraden, intensive Quanta in mannigfacher Weise gleichfalls im Raume eine Darstellung finden können, so genügt es zunächst allein Raumumgrenzungen als Repräsentanten psychologischer Continua zu betrachten, aus deren vergleichender Betrachtung theoretische auf den Begriff der räumlichen Umgrenzung gegründete Untersuchungen resultiren.

Damit sind die beiden aus der Beachtung der psychologischen Ordnung der Bewusstseinsinhalte sich ergebenden Begriffe der discreten Zahl und continuirlichen Raumumgrenzung gewonnen. Sie stellen die beiden der psychologischen Grundlage nach, also prinzipiell verschiedenen Gestaltungen des gewöhnlich mit dem Namen „Quantum" bezeichneten Begriffes dar, dessen Natur festgestellt werden musste, um die Merkmale des Begriffs quantitativer Abhängigkeiten oder mathematischer Funktionen kennen zu lernen.

§ 11. Um nun dieses Ziel auf Grund der gewonnenen Resultate zu erreichen, muss der auf den beiden Begriffen der Zahl und der Raumumgrenzung errichtete Bau in seiner systematischen Gliederung skizzirt und die hieraus sich ergebenden Formen mathematischer Abhängigkeit dargelegt werden. Es sind hiebei lediglich logische Gesichtspunkte massgebend, die es erlauben auch da, wo im allgemeinen bei mathematischen Untersuchungen von Funktionen nicht geredet wird, diesen Begriff einzuführen, um eine logisch vollständige Erörterung seines Inhaltes und Umfanges zu erreichen. In diesem Sinne sollen nämlich im folgendem auch die Abhängigkeiten räumlicher Quanta, die in rein geometrischer Weise vermittelt sind, Funktionen genannt werden.

Das räumliche Quantum und die Zahl verlangen von einer systematischen Erforschung zunächst die Klarlegung der ihre individuelle Existenz bedingenden Eigenschaften, die beim Raumquantum durch unmittelbare Vergleichung mit anderen Raumumgrenzungen, bei der Zahl durch Beachten der verschiedenen, möglichen Arten von Zusammensetzungen aus anderen Zahlen gefunden werden. Eine erschöpfende Darlegung ihrer Eigenschaften gibt eine vollständige Erkenntniss ihrer Natur, die nothwendig ist, um die Beziehungen zu erforschen, die zwischen den Raumumgrenzungen resp. Zahlen stattfinden können. Dabei ist zu beachten, dass es stets einzelne in ganz bestimmter Weise gegebene Raumgebilde

oder Zahlen sind, die zunächst den Gegenstand der Untersuchungen bilden. Treten diese nun in gegenseitige Beziehung, so erlangt man damit die primitive Form einer Funktion, deren Wesen folglich darin besteht, dass aus einzelnen, völlig bestimmten Raumformen oder Zahlen andere in gleicher Weise unabänderliche Raumformen resp. Zahlen abgeleitet werden; dabei ist der Zusammenhang zweier räumlicher Gebilde durch anschauliche Construction, die Abhängigkeit zweier Zahlen durch Ausführung der elementaren, aus der Addition sich ergebenden Operationen vermittelt.

Eine solche Abhängigkeit besteht beispielsweise zwischen den Zahlen 12 und 4, indem $12 = 4 + 4 + 4$ gesetzt werden kann; andererseits besteht zwischen einem Kreise und dem ihm einbeschriebenen regulären Sechseck der bekannte, durch Construction vermittelte Zusammenhang.

In dieser seiner primitiven Gestalt hat der Funktionsbegriff zwei specifisch mathematische Merkmale, die darin bestehen, dass es erstens individuelle Raumumgrenzungen resp. Zahlen sind, die in Abhängigkeit stehen, dass es zweitens geometrische Constructionen resp. Zahlenoperationen sind, die diese Abhängigkeit vermitteln.

III. Der Funktionsbegriff der Geometrie und Analysis in seiner allgemeinen Gestaltung.

§ 12. In welcher Weise sich diese Merkmale bei dem in der Entwickelung fortgeschrittenen Funktionsbegriff modificiren, soll die nun erfolgende Betrachtung des weiteren Fortgangs der auf den Begriff der Raumumgrenzung und der Zahl basirten Untersuchungen lehren, die ohne Rücksicht auf ihre historische Entwicklung, nach logischen Gesichtspunkten in kurzen Zügen charakterisirt werden sollen.

Nachdem die Erforschung der Eigenschaften einzelner, individueller Raumgebilde deren Natur klargelegt hat, bietet diese Erkenntniss die Möglichkeit einerseits Elementargebilde aufzustellen, die durch einfachste Eigenschaften charakterisirt sind, und diese zur Grundlage weiterer geometrischer Forschungen zu machen, andererseits die unendliche Fülle geometrischer Gebilde durch Hervorheben charakteristischer Eigen-

schaften zu classificiren. So werden Punkt, Gerade und Ebene als Elementargebilde nullter, erster und zweiter Dimension gefunden und indem man beachtet, wie aus dem Punkt die Gerade, aus dieser die Ebene und aus letzterer der Raum sich erzeugt, kann man zu einer Erfassung des formalen Gehaltes dieses Prozesses gelangen, der dann als solcher beliebig weit fortgesetzt werden kann und zu n-dimensionalen Gebilden führt, wie das Grassmann*) in seiner Ausdehnungslehre in eingehender Weise dargelegt hat. Innerhalb der einzelnen Dimensionen aber treten die geometrischen Gebilde nicht mehr als individuelle Gestalten auf, sondern als Träger von Eigenschaften, was mit sich bringt, dass alle mit diesen in den Vordergrund gestellten Eigenschaften behafteten Gestalten als gleichwerthig betrachtet werden und durch stetige Veränderung der nicht beachteten Eigenschaften in einander übergehen können. Damit tritt Bewegung an Stelle der früheren Starrheit und bestehen nun Abhängigkeiten, so müssen diese zwar durch Construction vermittelt gedacht werden, sie sind aber nicht mehr an die Raumgebilde als Individua sondern als Erscheinungsformen der aus ihnen durch Hervorhebung einzelner und durch Abstraktion von den anderen Eigenschaften gewonnenen Raumbegriffe gebunden. Die eigentliche Natur solcher Abhängigkeiten oder geometrischer Funktionen wird darum erst dann recht erkannt, wenn die geometrischen Gebilde, an denen zunächst die Abhängigkeit in die Anschauung tritt, bleibend dem Bewusstsein vorschweben und dabei alle diejenigen Veränderungen erleiden, die sich mit der constructiv vermittelten Abhängigkeit vertragen. Indem nun aber eine solche räumliche Gestalt als bleibender Inhalt des Bewusstseins alle erlaubten Veränderungen erleidet, erzeugt sie so eine zu einem Gesammtinhalte zusammenfliessende also continuirliche Mannigfaltigkeit von Gestalten, die somit im allgemeinen durch Bewegung einer individuellen Gestalt gewonnen wird. Die Construction, die anfänglich mit Lineal und Cirkel ausgeführt wird, ist bei diesen allgemeinen Funktionen nur mehr ein anschaulicher Vorgang, der durch symbolische Algorithmen seinen allgemeinen Ausdruck erhalten kann, wie dies durch die geometrische Analysis thatsächlich geschieht. Ist aber dieser Uebergang von einer wirklichen Ausführung

*) Die Ausdehnungslehre von 1844 — insbesondere Einleitung; C. Darlegung des Begriffs der Ausdehnungslehre.

der Construction zu einer blos möglichen, in der Anschauung vollziehbaren bewerkstelligt, so fordert bald das Streben nach allgemeiner Erfassung der geometrischen Abhängigkeiten ihr Festhalten auch da, wo sie nicht mehr durch unmittelbare Anschauung gegeben sind. Eine ideelle Construction tritt dann an Stelle der anschaulichen, die beide von demselben Algorithmus umfasst werden. So findet das Imaginäre in der Geometrie seinen rein geometrisch, durch das Streben nach permanenten Gesetzmässigkeiten begründeten Platz. Als ein Beispiel, das in einfacher Weise die hier dargelegte Natur der geometrischen Funktionen erkennen lässt, ohne den Anspruch zu machen, besonders gut gewählt zu sein, mag folgendes dienen:

Zwei Kreise, deren Centraldistanz kleiner als die Summe ihrer Radien ist, schneiden sich in zwei Punkten, deren Verbindungslinie als gemeinsame Secante eine Funktion der beiden Kreise ist. Jedoch ist diese in gleicher Weise durch je zwei Kreise des durch die beiden Schnittpunkte gehenden Kreisbüschels bestimmt. In ähnlicher Weise ist nun aber durch zwei ganz beliebig gelegene Kreise ein Kreisbüschel bestimmt, und es erscheint, auch wenn die Kreise sich nicht schneiden, eine Gerade, nämlich die Linie gemeinsamer Potenzen als Funktion jener Kreise, durch die nunmehr die Verbindungslinie der „imaginären" Schnittpunkte definirt ist.

In aller Kürze sei noch bemerkt, dass solche funktionellen Abhängigkeiten stets umkehrbar sind, wenn auch diese Umkehrung eine unendlich vieldeutige sein kann. So gehört in dem hier gegebenen Beispiele jener Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der beiden Kreise nicht blos dieses Paar, sondern jedes beliebige Paar von Kreisen zu, für welches jene Gerade die Linie gemeinsamer Potenzen ist.

§ 13. Das gleiche Streben nach Allgemeinheit, welches die geometrischen Untersuchungen leitet, führt auch dazu, an Stelle der Eigenschaften und Darstellungsformen einzelner Zahlen solche der Zahlen insgesammt oder ganzer Zahlklassen zu setzen. Dadurch wird es nun aber nöthig, Buchstaben als Collectivbezeichnungen einzuführen, die den Sinn haben, dass an ihre Stelle jede beliebige Zahl oder jede Zahl der durch eine Eigenschaft charakterisirten Klasse treten kann. Damit wird auch in die Untersuchungen über Zahlen die Variabilität eingeführt, deren Wesen darin besteht, dass an Stelle einer Collectivbezeichnung die durch sie zusammenge-

fassten einzelnen Zahlen gesetzt werden. Selbstverständlich ist hier nur von Zahlen als Zeichen von Mannigfaltigkeiten discreter Bewusstseinsinhalte die Rede. Ihre allgemeinen Eigenschaften finden ihren Ausdruck in den zahlentheoretischen Funktionen, in denen sich die erste Gestalt des allgemeinen Begriffs der Abhängigkeit von Zahlen darbietet. Sie drücken die Zusammengehörigkeit einer Zahl oder eines aus Zahlen gebildeten Ausdrucks mit einer andern Zahl aus, wodurch in allgemeiner Form eine Eigenschaft der letzteren oder eine an sie geknüpfte Gesetzmässigkeit dargestellt wird. So gehören beispielsweise jeder Zahl m eine Reihe zu ihr relative Primzahlen, die kleiner als m sind, zu, deren Anzahl durch einen von den beiden Faktoren der Zahl m abhängigen Ausdruck sich bestimmt.

Durch das Studium der Formen, in denen sich die Zahlen darstellen lassen, soll zunächst klar gelegt werden, in welcher Weise Zahlen oder Zahlklassen einen Ausdruck erhalten können und in wie weit solche Ausdrücke aequivalent sind. Es führt aber dann das Erfassen der selbständigen Bedeutung der Formen, die aus gegebenen Zahlen durch die Elementaroperationen hergestellt werden können, zu einer Erweiterung des Zahlbegriffs, der ein neues Untersuchungsgebiet eröffnet.

§ 14. Waren nämlich bisher die Zahlen lediglich Zeichen von Mannigfaltigkeiten, mit denen Operationen vorgenommen werden konnten, durch die neue Zahlen als Zeichen anderer Mannigfaltigkeiten gewonnen wurden, so bleiben nun als Merkmale des allgemeinen Zahlbegriffs blos die beiden folgenden: dass es ganze, absolute Zahlen oder Buchstaben als ihre Symbole sind, die als Material zu Operationen vorliegen, und dass mit ihnen durch thatsächliche Ausführung von Operationen Ausdrücke gebildet werden, welche durch ein symbolisches Zeichen zusammengefasst weiteren Operationen in gleicher Weise wie die anfänglich vorhandenen Zahlen unterworfen werden können. Nur eine Folge der eindeutigen Natur der Operationen, die mit den absoluten ganzen Zahlen vorgenommen werden können, ist es, dass auch die aus ihnen gebildeten nicht auf ganze Zahlen sich reducirenden Ausdrücke oder allgemeinen Zahlen aequivalent sind und blos der Form nach sich unterscheiden, wenn sie, gleichen Operationen unterworfen, zu gleichen Resultaten führen. Mit dieser Verallgemeinerung des Zahlbegriffs werden die sogenannten negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen in gleicher Weise

als Formen gewonnen, die aus den ursprünglich allein gegebenen ganzen, absoluten Zahlen hergestellt werden. Durch eine endliche Anzahl von Operationen werden die negativen und gebrochenen, mit einem Worte die „rationalen Zahlen“ erzeugt. Die „irrationalen“ Zahlen entstehen aus einer unendlichen Anzahl von Operationen, die eine unendliche Menge von rationalen Zahlen zu einer unendlichen Form verknüpfen. Es fragt sich nun aber, was unter einer unendlichen Form verstanden werden kann. Eine endliche Form begründet darin ihre Existenz, dass eine endliche Reihe von ganzen Zahlen erfasst und jedes Glied der Reihe mit einem folgenden durch eine Operation verbunden gedacht wird. Eine unendliche Reihe von ganzen Zahlen kann nun schlechterdings nicht in ihrer Totalität erfasst werden; so kann dies folglich blos insofern geschehen, als sie schon durch eine endliche, thatsächlich erfassbare Anzahl von Gliedern gegeben ist. Es ist dies aber dann nur dann der Fall, wenn eine endliche Anzahl von Gliedern ein Gesetz erkennen lässt, wornach ein Glied aus dem vorhergehenden erzeugt und mit diesem in einer bestimmten Weise verbunden gedacht werden kann. Das Hinzudenken, dass derselbe Process, welcher die vorhandene endliche Anzahl von Gliedern wirklich erzeugt und zu einer Form verbunden hat, ohne Ende fortgesetzt werden soll, ist es allein, das eine unendliche Form von der sie zu erzeugenden endlichen unterscheidet. Wenn man von „gesetzlosen“ Dezimalbrüchen spricht, die durch die bekannte Regel für das Ausziehen einer Quadrat- oder Kubikwurzel als irrationale Zahlen gewonnen werden, so verkennt man dabei die Bedeutung dieser Regel, die allein approximative Werthe für die irrationale Zahl geben kann. Diese selbst kann nur durch die Angabe des Gesetzes charakterisirt werden, das ihre Form erzeugt, da nur auf diese Weise eine solche im Denken erfasst werden kann.

Die bisher als Formen definirten allgemeinen Zahlen, die durch einen gemeinsamen Namen als „reelle“ Zahlen bezeichnet werden, wurden aus der Analyse des Begriffs der anfänglich allein gegebenen ganzen, absoluten Zahl gewonnen, indem blos von dem einen Merkmale abstrahirt wurde, das die anfängliche Beschränkung auf ganze Zahlen zur Folge hatte. Alle übrigen Merkmale bleiben den nicht auf ganze Zahlen reducirbaren Formen in gleicher Weise wie den durch ganze Zahlen darstellbaren. Es ist damit keine Theorie der

negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen gegeben. Es wäre dies Sache einer weiter ausgeführten Darlegung. Hier handelte es sich lediglich darum zu zeigen, wie die Genese des Begriffs der ganzen, absoluten Zahl aus seinen psychologischen Grundlagen zur Kenntniss seiner Merkmale führt, auf die gestützt zu dem allgemeinen Begriff fortgeschritten werden kann, dessen Entwicklung durch die Natur des ursprünglichen Begriffs bedingt ist. Denn auf diesem Wege allein kann eine volle Einsicht in den Begriff der Funktionen der allgemeinen Zahlen in einfacher und naturgemässer Weise gewonnen werden.

§ 15. Zu diesem Zwecke aber muss nun die Variabilität der allgemeinen Zahlen eingehender untersucht werden; denn wollte man einzelne, bestimmt gegebene allgemeine Zahlen als Funktionen anderer, in gleicher Weise bestimmter Zahlen betrachten, so würden sich diese Funktionen von den früher betrachteten primitiven Funktionen blos dadurch unterscheiden, dass allgemeine Zahlen an Stelle der ganzen, absoluten Zahlen getreten sind. Das Charakteristische des allgemeinen Funktionsbegriffs besteht aber gerade darin, dass eine unter einem Symbol zusammengefasste Mannigfaltigkeit von Zahlen einer andern Mannigfaltigkeit zugeordnet wird.

Ich erinnere zunächst an die Variabilität der ganzen, absoluten Zahlen. Das Wesen derselben besteht darin, dass an Stelle eines Symbols jede beliebige, einzelne Zahl treten kann. Insbesondere kann dies in der Art geschehen, dass dabei die Zahlen in derselben Reihenfolge verwendet werden, in der sie sich ihrer Grösse nach zusammenordnen lassen. Es lässt sich nun auch ein gegebenes System von allgemeinen Zahlen der Grösse nach ordnen oder geordnet denken. Somit können sie auch in ähnlich gesetzmässiger Weise an Stelle des sie zusammenfassenden Symboles treten, wie die ganzen Zahlen. Ist nun aber ein Symbol als Collectivbezeichnung für jede irgendwie denkbare reelle Zahl gegeben, so ist wohl zu bedenken, dass es kein Gesetz gibt, nach dem die Gesammtheit der reellen Zahlen einheitlich und der Grösse nach geordnet erzeugt werden könnte wie dies bei den absoluten Zahlen der Fall ist, von denen jede durch Hinzufügen von 1 aus der vorhergehenden abgeleitet wird. Es ist zwar von zwei beliebigen reellen Zahlen die eine grösser als die andere; aber stets sind unbegrenzt viele Zahlen denkbar, die sich ihrer Grösse nach zwischen jene

einordnen, deren unendliche Fülle in Folge des Mangels an einem sie erzeugenden Gesetze im Denken nicht erschöpft werden kann. Gleichgiltig ist es, ob jene beiden Zahlen um endlich oder unendlich wenig verschieden sind, wenn sie nur verschieden sind oder als verschieden gedacht werden. Da nun die Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen nicht als einheitlich erzeugte Mannigfaltigkeit dem Denken gegeben ist, so kann von einer Variabilität der reellen Zahlen nur insofern die Rede sein, als die Glieder einer beliebigen, durch ein Gesetz erzeugten Reihe von reellen Zahlen in einer bestimmten Aufeinanderfolge, am einfachsten ihrer Grösse nach geordnet, an Stelle des jede reelle Zahl in gleicher Weise bezeichnenden Symboles gesetzt werden können. Jene Reihe kann von völlig beliebiger Beschaffenheit sein und es kann jede solche Reihe durch jede andere ersetzt werden, die ebenso wie die erstere durch ein Gesetz dem Denken zugänglich sein muss, während die Wahl des Gesetzes völlig beliebig bleibt. Im allgemeinen wird dies allerdings in der Art bestimmt werden, dass die Differenzen der aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe unendlich klein gedacht werden. Dies darf jedoch nicht zu der Annahme verleiten, als wäre durch eine solche Reihe die ganze Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen erschöpft. Es ist und bleibt diese letztere unerschöpflich. Denn es existirt ja doch eine Zahl nur in soweit, als sie erzeugt wird oder erzeugt gedacht wird. Eine unendliche Mannigfaltigkeit von Zahlen kann aber nur durch ein Gesetz erzeugt gedacht werden. Es gibt nun aber einmal kein solches, welches die Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen insgesammt erzeugen könnte. Somit kann diese Mannigfaltigkeit blos in der Weise Gegenstand des Denkens sein, dass eine gesetzmässig erzeugte Mannigfaltigkeit als gegeben angenommen wird und hinzugedacht wird, dass dieselbe durch jede andere gesetzmässig erzeugte Mannigfaltigkeit unendlich vieler reellen Zahlen ersetzt werden kann.

§ 16. Diese Eigenthümlichkeit, welche die Variabilität der reellen Zahlen von derjenigen der ganzen Zahlen wesentlich unterscheidet, kann in keiner Hinsicht eine Veränderung erleiden, wenn nun die reellen Zahlen als Punkte einer Geraden in bekannter Weise gedeutet werden. Ein Axiom liegt dieser Umdeutung der Zahlen in Punkte zu Grunde, das G. Cantor*) zuerst als solches erkannt hat und das darin be-

*) Math. Annalen, Bd. V. pag. 127 und 128

steht, dass jeder rationalen oder irrationalen Zahl ein und nur ein Punkt der Geraden zuzuordnen ist, falls vorher ein beliebiger Punkt derselben als Nullpunkt und eine beliebige Strecke als Einheitsstrecke angenommen wurde. Nicht minder scheint mir aber der Umdeutung eines Punktes, der in beliebiger Weise fixirt gedacht werden mag, in eine Zahl, die allerdings in beliebig vielen Formen dargestellt werden kann, das Axiom zu Grunde zu liegen, dass jeder Punkt durch Vervielfachung und Theilung der Einheitsstrecke erreicht gedacht werden kann. Das Gesetz, welches diese Theilung und Vervielfachung beherrscht, bestimmt alsdann die Form, in der sich die dem Punkte entsprechende Zahl darstellt. Ein allgemeiner Beweis, dass thatsächlich jeder Punkt durch Operiren mit einer beliebigen Einheitsstrecke erreicht werden kann, ist ja nicht möglich, wesshalb es mir nothwendig erscheint, jenes Axiom als Ergänzung zu dem zuerst genannten ausdrücklich hinzuzufügen, wenn man sich nicht, wie G. Cantor in der citirten Abhandlung es thut, auf Punkte, die durch Construction bekannt sind, beschränkt.

Auch in dieser Umdeutung können keine zwei verschiedenen Zahlen als Punkte fixirt werden, ohne dass unbegrenzt viele Punke, die nun Zahlen repräsentiren, dazwischen liegend gedacht werden müssen, mögen jene anfänglich fixirten Punkte durch ein endliches oder unendlich kleines Intervall getrennt sein; ebenso wenig gibt es jetzt ein einheitliches Gesetz, welches die Gesammtheit aller in der Geraden fixirbaren Punkte als im Denken erfasste Zahlen erzeugt. Es sind blos Punktreihen denkbar, deren Träger die Gerade ist, deren aufeinanderfolgende Glieder aber, auch wenn ihre Entfernung unendlich klein ist, immer durch Strecken getrennt bleiben, die dann und nur dann verschwinden würden, wenn zwei Punkte fixirt werden könnten, zwischen denen kein dritter Punkt liegend gedacht werden kann. Es ist dies aber schlechterdings denkunmöglich. Die Punkte als Bilder der Zahlen sind ja immer durch ihren Abstand vom Nullpunkt in unabänderlicher Weise gekennzeichnete Punkte, die in keiner Weise verschoben, bewegt werden und durch Bewegung einander genähert werden und so zusammenfliessen können. Die Gesammtheit aller Punkte einer Geraden, denen vermöge des aufgestellten Axioms Zahlen zugeordnet werden, kann nur insofern dem Denken gegeben sein, als irgend eine durch ein Gesetz charakterisirte Punktreihe gegeben ist, zu der

hinzugedacht wird, dass sie durch eine andere, von einem andern Gesetze beherrschte, gleichfalls in der stetigen Erstreckung der Geraden gelagerte Punktreihe ersetzt werden kann. — Man kann sagen: die Gesammtheit aller Punkte, die durch ihre Entfernung vom Nullpunkte in einer Geraden angegeben werden können, oder, was dasselbe ist, die Gesammtheit aller Zahlen, die jenen Punkten zugeordnet sind, ist ein Begriff, der jede, irgendwie denkbare Punkt- oder Zahlenreihe umfasst und nur in Gestalt einer solchen Reihe in die Erscheinung treten kann. Die Mannigfaltigkeit dieser Reihen wird von keinem Gesetze zu einem im Bewusstsein verbundenen Ganzen vereinigt. Es kann daher auch nicht gesagt werden, dass diese Mannigfaltigkeit eine continuirliche sei, was dann und nur dann der Fall wäre, wenn sie sich zu einem einzigen Bewusstseinsinhalte zusammenschlösse.

Freilich ist die Gerade, in der die Punkte fixirt werden, ein einziger Bewusstseinsinhalt; daraus folgt aber nur, dass die Mannigfaltigkeit der Strecken, in die jene zertheilt gedacht werden kann, eine continuirliche ist, weil diese sich zu dem einen Bewusstseinsinhalte einer Geraden vereinigen. Nur wenn das unvermittelte Nebeneinanderlegen von Punkten möglich wäre und so die Gesammtheit dieser Punkte zu einer Geraden sich verschmelzen würde, könnte von einem Punktcontinuum resp. Zahlencontinuum die Rede sein. Wenn trotz der auf der Hand liegenden Unmöglichkeit zwei unvermittelt neben einander gelagerte Punkte, ohne eine sie verbindende Strecke zu denken von einem Punktcontinuum die Rede ist, so beruht dies auf einer Verkennung der psychologischen Grundlage, aus welcher der Begriff des Continuums sich entwickelt und auf einer unrichtigen Auslegung des durch Bewegung eines Punktes erzeugten räumlichen Gebildes als vermeintlichen Repräsentanten der Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen. Es bildet, um Gesagtes zu wiederholen, eine gegebene Mannigfaltigkeit von Bewusstseinsinhalten eben nur dann ein Continuum, wenn sie sich zu einem einheitlichen Inhalte zusammenfügt, ohne dass andere, der Mannigfaltigkeit nicht zugehörige Inhalte des Bewusstseins den Zusammenhang vermitteln. Darum kann eine Mannigfaltigkeit von Punkten niemals ein Continuum bilden und darum ist die stetige Erstreckung einer Geraden eine continuirliche Mannigfaltigkeit der sie constituirenden Strecken, nicht aber der in ihr fixirbaren Punkte. Es kann zwar dieses Continuum

von Strecken, die endlich oder unendlich klein gedacht werden können, durch Bewegung eines Punktes erzeugt werden und es kann damit vom Anfangspunkte einer Strecke zu ihrem Endpunkte ein durch unausgesetzte Bewegung vermittelter continuirlicher Uebergang gewonnen werden, dadurch wird aber die Mannigfaltigkeit der Punkte selbst — und nur diese, nicht der in Bewegung begriffene Punkt, sind Repräsentanten der Zahlen — keineswegs eine continuirliche. Der durch Bewegung vermittelte Uebergang von einem Punkte zu einem andern hat aber überdies mit dem Uebergang von einer Zahl zu einer andern nichts gemein, da blos Constructionen das geometrische Bild der Operationen sind, durch die eine zweite Zahl aus einer gegebenen ersten gewonnen werden kann.

§ 17. Dies, glaube ich, muss auch einer Stelle der Weierstrass'schen Vorlesungen*) über analytische Funktionen gegenüber im Auge behalten werden. Es heisst dort:

„Wir gelangen zu der Vorstellung der Stetigkeit, wenn wir uns einen Punkt auf einer Geraden so sich bewegen denken, dass er alle Punkte durchläuft.

Die Zahlenreihe aber scheint aus discreten Elementen zu bestehen, so dass ein solcher stetiger Uebergang von einer Zahl zur andern unmöglich erscheint. Bleiben wir aber bei der geometrischen Darstellung der Zahlen, die wir von einem gewissen Punkte aus auf einer Strecke abtragen können, so haben wir bewiesen, dass jede Zahl durch eine Strecke, dass aber auch umgekehrt jede Strecke durch eine Zahl ausdrückbar ist. Dadurch ist dann die Möglichkeit des continuirlichen Uebergangs erwiesen."

Es kann dieser continuirliche Uebergang nur durch Bewegung vermittelt werden; diese aber ist dem Wesen der Zahl fremd.

Sieht man nun davon ab, dass jeder irgendwie in einer Geraden angebbarer Punkt von einem in continuirlicher Bewegung begriffenem Punkte überstrichen werden kann, indem diese Eigenthümlichkeit zwar die Punkte, sofern sie in einem Continuum sich lagern, charakterisirt, aber in den an Stelle der Punkte gesetzten Zahlen kein Aequivalent besitzt, so können doch andere Eigenschaften der Punktreihen angegeben werden, die ihnen nur in sofern zukommen, als die continuirliche Gerade ihr Träger ist, aber gleichwohl auch von den

*) Manuscript der Vorlesungen über analytische Funktionen: Theorie der rationalen Funktionen und Potenzreihen.

entsprechenden Zahlenreihen gelten. Es wäre jedoch ein Fehlschluss, wollte man aus dem Vorhandensein solcher Eigenschaften die Continuität der durch sie gekennzeichneten Punkt- resp. Zahlenreihen erschliessen.

In der Auffindung solcher Eigenschaften scheint mir der Kern der Untersuchungen von G. Cantor über Punktmannigfaltigkeiten*) zu bestehen. Sie ruhen auf dem Begriff der Ableitung einer Punktreihe, der sich auf das Vorhandensein von Häufungsstellen gründet. Diese letzteren sind aber nur da möglich, wo ein Continuum die Mannigfaltigkeit umschliest. So gewinnt er auf Grund des anticipirten Continuums der Geraden den Begriff einer „perfect zusammenhängenden“ Punktmenge**), welch letztere er als „Punktcontinuum“ betrachtet und damit den Begriff des Continuums definirt.

Es kann aber eine solche Punktmenge ein Continuum weder darstellen noch definiren, wie die früheren, ausführlichen Darlegungen nachgewiesen haben; es sei denn, dass man das Wort „Continuum“ in einer seiner eigentlichen Bedeutung fremden Weise zur Bezeichnung der „perfect-zusammenhängenden“ Punktmengen verwenden wollte.

In ähnlicher Weise sucht Dedekind das Wesen der Stetigkeit in einer Eigenschaft, die den in der stetigen Erstreckung der Geraden fixirbaren Punkten zukommt und die er als folgendes Princip formulirt***):

„Zerfallen alle Punkte einer Geraden in zwei Classen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Classe links von jedem Punkte der zweiten Classe liegt, so existirt ein und nur ein Punkt, welcher diese Eintheilung aller Punkte in zwei Classen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“

Indem nun Dedekind die Punkte der Geraden in Zahlen umdeutet, gilt dieses Princip in gleicher Weise von den Zahlen, das nun lautet:****)

„Zerfällt das System R aller reellen Zahlen in zwei Classen A_1, A_2 von der Art, dass jede Zahl α_1 der Classe A_1 kleiner ist als jede Zahl α_2 der Classe A_2, so existirt eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird.“

*) Math. Annalen Bd. XV, XVII, XX, XXI, sowie: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, 1883.

**) Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre § 10, pag. 31 u. 32.

***) Stetigkeit u. irrationale Zahlen von Dedekind, 1872. § 3, pag. 18.

****) Dasselbe § 5, pag. 25.

Es sagt dieses Princip offenbar nichts anderes als dass jede irgendwie gegebene Zahl, kleiner oder grösser als eine andere oder aber ihr gleich ist. Ich verstehe nun nicht, wie daraus die Stetigkeit der Zahlen folgen soll, wenn man nicht die Stetigkeit, die der Geraden eigenthümlich ist, auf die in ihr sich lagernden Punktreihen ausdehnt. Die Stetigkeit kommt aber allein der Geraden zu, keineswegs den in ihr fixirten Punkten, mögen diese durch endliche oder unendlich kleine Intervalle getrennt sein. Ein einheitlich erzeugtes System aller reellen Zahlen gibt es ja nicht, wenn man nicht der durch Bewegung eines Punktes erzeugten Geraden unrichtiger Weise die blos als Punktreihen anschaulichen, reellen Zahlen parallel setzt.

Wollte man der Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen Stetigkeit zuerkennen, so könnte diese nur die Bedeutung haben, dass es stets möglich ist, eine Reihe von Zahlen sich zu denken, deren successiven Glieder unendlich kleine Differenzen haben. Eine solche Reihe könnte man zur Unterscheidung von anderen Reihen, deren aufeinanderfolgende Glieder endliche Differenzen aufweisen, eine stetige Reihe nennen. Damit wird aber das Wort „stetig" in principiell verschiedener Weise angewendet, was zu Irrthümern Anlass geben kann.

§ 18. Das Wesen der nun ausführlich dargelegten Variabilität der reellen Zahlen erleidet keine Veränderung, wenn der Begriff der Zahl eine durch das Streben nach permanenten Darstellungsformen gegebener Zahlen bedingte, weitere Ausbildung erhält, die kurz an einem Beispiele dargelegt werden soll.

Ist nämlich $a > b$, so gibt es stets eine Form, die ins Quadrat erhoben die Zahl $(a-b)$ erzeugt und die symbolisch durch das Zeichen $\sqrt{a-b}$ dargestellt wird. Ist nun aber $a < b$, so wird die wirkliche Darstellung einer solchen Form unmöglich. Es gibt eben keine thatsächlich herstellbare Form, die ins Quadrat erhoben einen negativen Zahlenwerth ergibt. Gleichwohl verlangt aber das Streben nach Allgemeinheit eine permanente Darstellungsform der Zahl $(a-b)$ als Quadrat einer andern Zahl, die nun eben, wenn $a < b$, als eine ideale Form durch die Operationen, denen sie genügen soll, den Charakter einer Zahl erhält. Alle sonstigen Merkmale des Zahlbegriffs bleiben ihm auch in dieser verallgemeinerten Gestalt erhalten; die idealen Formen unter-

liegen in derselben eindeutigen Weise den Operationen wie die reellen Formen, nur wird von einer thatsächlichen Darstellung der Form abstrahirt, die nun symbolisch durch das Produkt des Zeichens $\sqrt{-1}$ oder „i“ mit einer reellen Form oder reellen Zahl bezeichnet und eine imaginäre Zahl genannt wird. So gelangt man zu den complexen Zahlen $z = x + i.y$, wo x und y reelle Zahlen bezeichnen. Sie finden ihre Darstellung als Punkte in der Ebene und es verhalten sich diese Punkte zu der sie umfassenden Ebene ganz ebenso wie die Punkte, welche die reellen Zahlen darstellen zu ihrer Trägerin, der Geraden. Wird jede irgendwie gegebene complexe Zahl in gleicher Weise durch das Symbol $z = x + iy$ bezeichnet, wie jede beliebige reelle Zahl durch das Symbol x, so kann die Variabilität dieser complexen Zahlen nur darin bestehen, dass die Glieder beliebiger Zahlmengen, die in Punktfeldern der Ebene ihre geometrische Darstellung finden, nach einander an Stelle des Symboles „z“ treten. Es gibt für die complexen Zahlen so wenig wie für die reellen Zahlen ein Gesetz, das ihre Gesammtheit zu einer im Denken verbundenen Einheit verschmelzen könnte, als welche sich die Gerade und Ebene durch die unmittelbare Anschauung präsentiren.

Mit der Bildung des Begriffs der complexen Zahl hat die Tendenz zur Verallgemeinerung, die in dem Begriff der absoluten ganzen Zahl lag, ihre Befriedigung erhalten; die anderweitigen sogenannten complexen Zahlen, wie die Hamilton'schen Quaternionen und das Grassmann'sche alternirende Zahlensystem ruhen nicht auf dem Begriff der ganzen Zahl, vielmehr werden sie, wie dies namentlich die von Hankel*) gegebene Darstellung derselben zeigt, aus einer allgemeinen Formenlehre gewonnen, welcher der Begriff der Operation in allgemeinster Weise zu Grunde liegt, zu dessen Modificationen das Bedürfniss Anlass gibt, geometrische Constructionen in allgemeiner Weise in das Gewand eines Algorithmus zu kleiden, oder complicirten Operationen, die mit den Zahlen vorgenommen werden müssten, einen zusammenfassenden, symbolischen Ausdruck zu geben. So wurde Hamilton zu seinen Quaternionen durch das Streben geführt, symbolische Operationen zu erfinden, die in ähnlicher Weise

*) Vorlesungen über die complexen Zahlen u. ihre Funktionen, 1867. I. Theil, Theorie der complexen Zahlensysteme, II. Abschnitt.

die Geometrie des Raumes beherrschen, wie die mit den complexen Zahlen ausführbaren Operationen die Geometrie der Ebene; während Lipschitz*) durch die allgemeine Lösung des Problems, eine Summe von n Quadraten in sich selbst zu transformiren zu Operationsregeln für symbolische Ausdrücke geführt wird, die als specielle Fälle diejenigen für die complexen Zahlen und die Quaternionen enthalten. Es kann aber nur durch theilweises Aufgeben der die ganzen Zahlen charakterisirenden Operationsregeln zu solchen höheren sogenannten complexen Zahlsystemen fortgeschritten werden, was die Berechtigung gibt, die aus der absoluten, ganzen Zahl fliessende Begriffsbildung als eine mit der reellen und complexen Zahl abschliessende zu bezeichnen.

§ 19. Der Funktionsbegriff nun, der die variable, reelle oder complexe Zahl zur Grundlage hat, besitzt, wie der früher festgestellte Begriff einer primitiven Funktion, zwei specifisch mathematische Merkmale, die darin bestehen, dass Zahlmannigfaltigkeiten, die durch ein Symbol — im allgemeinen durch die letzten Buchstaben des Alphabets — eine gemeinsame, zusammenfassende Bezeichnung finden, in wechselweise Abhängigkeit gesetzt werden, dass ferner diese Abhängigkeit durch die Operationen, die mit den Zahlen vorgenommen werden können, vermittelt wird. Die Modification, die der Begriff einer primitiven Funktion zu erleiden hat, um zu dem Begriffe, der die Grundlage der nach ihm benannten Funktionentheorie bildet, sich umzugestalten, besteht somit blos darin, dass an Stelle der in Abhängigkeit gesetzten individuellen Zahlen Mannigfaltigkeiten von Zahlen, die als Punktreihe oder Punktfeld sich geometrisch veranschaulichen lassen, treten. In dieser Gestalt ist der Funktionsbegriff der das mit dem Namen Analysis bezeichnete Gebiet der Untersuchungen, denen die variable allgemeine Zahl zu Grunde liegt, beherrschende Begriff, der sich so als Funktionsbegriff der Analysis dem von logischen Gesichtspunkten aus eingeführten Funktionsbegriff der Geometrie an die Seite stellt.

Nachdem so der Inhalt des Funktionsbegriffs der Mathematik als Resultat einer lediglich von logischen Rücksichten geleiteten Untersuchung festgestellt wurde, ergeben sich die besonderen Gestaltungen, in denen dieser Begriff

*) Untersuchungen über die Summen von Quadraten, 1886. pag. 12, pag. 26, pag. 71—74.

auftreten kann und die seinen Umfang bestimmen, in einfacher Weise durch das Studium der den Inhalt des Begriffs zusammensetzenden Merkmals und der Beziehungen, die zwischen diesen Merkmalen bestehen können.

Auf diesem Wege sollen im folgenden die hauptsächlichen Gattungen des Funktionsbegriffs der Analysis, da dieser eine fundamentale Bedeutung besitzt, kurz gekennzeichnet werden.

IV. Die hauptsächlichen Gattungen des Funktionsbegriffs der Analysis.

§ 20. Beachtet man zunächst die Formen, die eine solche Funktion besitzen kann, so scheiden sich diese in algebraische und transcendente, je nachdem sie durch eine endliche Anzahl von Operationen hergestellt werden, oder aber durch eine unbegrenzte Fortsetzung einer gesetzmässigen Folge von Operationen erzeugt gedacht werden, wofern dieser unbegrenzte Prozess nicht durch weitere Operationen auf einen im Endlichen abschliessenden reducirt werden kann. Es scheiden sich somit die Funktionen mit Rücksichtnahme auf ihre Form in algebraische und transcendente Funktionen, von denen die ersteren durch eine endliche Anzahl von Operationen, die mit den variabeln Zahlengrössen vorgenommen werden, ihre Darstellung finden, während die letzteren durch eine unbegrenzte Folge von Operationen aus den variabeln Zahlengrössen erzeugt gedacht werden müssen, mit Rücksicht auf welche die Funktionen alsdann transcendent heissen.

Betrachtet man ferner die Formen rücksichtlich der Möglichkeit eine der Variabeln einer aus den übrigen Variabeln allein hergestellten Form gleichzusetzen, so ergibt sich daraus eine im Grunde genommen äusserliche Scheidung in explicite und implicite Funktionen, je nachdem eine solche Darstellung einer Variabeln durch eine aus den übrigen Variabeln allein gebildeten Form möglich ist oder nicht.

§ 21. Die Mannigfaltigkeiten von Zahlen nun, die durch Funktionen einander zugeordnet werden, lassen sich einmal als für sich bestehende Mannigfaltigkeiten betrachten, die sich in unabhängige und von diesen abhängige Zahlmengen scheiden und rücksichtlich ihrer geometrischen Darstellung

zu untersuchen sind; sodann aber bietet es besonderes Interesse, die Art und Weise, in der die Zuordnung der abhängigen zu den unabhängigen Zahlmannigfaltigkeiten möglich ist, zu erforschen.

Richtet man so zuerst das Auge auf die durch unabhängige Variable dargestellten Mannigfaltigkeiten, so können diese solche reeller oder complexer Zahlen sein, was zur Scheidung der Funktionen in solche von reellen oder complexen Argumenten führt, wenn die unabhängigen Variabeln als Argumente bezeichnet werden. Dabei gibt die Beachtung der Anzahl, in der sich unabhängige Variable vorfinden, zu einer weiteren Scheidung der Funktionen nach der Anzahl ihrer Argumente Anlass.

Betrachtet man sodann die aus den unabhängigen Mannigfaltigkeiten abgeleitete abhängige Mannigfaltigkeit von Zahlen, die im allgemeinen als Mannigfaltigkeit von complexen Zahlen oder von Punkten der Zahlenebene betrachtet werden muss, da auch reellen Werthen des Argumentes complexe Werthe der abhängigen Variabeln sich zuordnen können, so findet man, dass diese in den verschiedenartigsten Gestalten auftreten können.

Bei Funktionen eines complexen Argumentes ist diese der Mannigfaltigkeit von Punkten der Zahlenebene entsprechende abhängige Mannigfaltigkeit eine solche, die in einem Theile der Ebene, in der ganzen Ebene, oder aber in dem mehrfach und selbst unendlich vielfach übereinander geschichteten System von Ebenen als Punktfeld ihre Darstellung findet, während bei Funktionen eines reellen Argumentes ähnliches gilt, nur mit der Modifikation, dass Punktreihen einer theilweise oder vollständig, dabei in einzelnen Theilen mehrfach und auch unendlich vielfach ins Auge gefassten Geraden die geometrischen Repräsentanten der abhängigen Werthmengen sind. Als besonderer Fall ist noch zu erwähnen, dass auch einzelne Punkte der Zahlenebene immer und immer wieder in unbegrenzter Wiederholung den Punkten der Argumentwerthe sich zuordnen können, so dass ein unendlich oft zählender einzelner Punkt oder ein System solcher Punkte die ganze abhängige Mannigfaltigkeit der Funktionswerthe repräsentirt.

So ist die Mannigfaltigkeit der Werthe $Z = z^2$, wenn complexe Zahlen an Stelle des z gesetzt werden, eine in der doppelt zählenden Ebene gelagertes Punktfeld, dagegen, wenn

reelle Zahlen durch das z bezeichnet werden, eine Punktreihe, die den doppelt zählenden positiven Theil der Geraden erfüllt, innerhalb deren die reellen Zahlen ihr geometrisches Bild finden. Ferner findet die Mannigfaltigkeit der Werthe $Z = \sin z$, bei complexem Argumente in einem unendlich vielfach übereinander geschichteten Systeme von Ebenen ihre anschauliche Darstellung, während bei reellem Argumente an Stelle des Systems von Ebenen ein gleiches System von übereinander geschichteten Strecken zwischen den Punkten ± 1 der Geraden der reellen Zahlenwerthe tritt.

Je nachdem nun ein oder mehrere Werthe solcher abhängigen Werthmengen den einzelnen Argumentwerthen zugeordnet sind, heissen die Funktionen ein- oder mehrdeutige Funktionen ihres Argumentes; darnach sind die soeben angeführten Beispiele von Funktionen eindeutige Funktionen, während ihre Umkehrungen im ersteren Falle eine zweideutige, im letzteren Falle eine unendlich vieldeutige Funktion ist.

§ 22. Die grösste Verschiedenheit aber kann sich in dem Verhalten der abhängigen zur unabhängigen Zahlenmannigfaltigkeit zeigen, wenn man die Variabilität der ersteren mit Rücksicht auf die Variabilität der letzteren untersucht.

Es soll diese hier nur insofern Beachtung finden, als sie Anlass gibt zur Bildung des Begriffs einer stetigen und einer differentiirbaren Funktion.

Wird nämlich der Werth des Arguments um unendlich kleine Zahlenwerthe vermehrt gedacht, so tritt an Stelle des anfänglichen Werthes der abhängigen Variabeln ein anderer Werth. Ist nun die Differenz dieser Werthe unendlich klein, wie auch die Argumentwerthe innerhalb eines vorgegebenen Intervalls angenommen werden mögen, so heisst die Funktion eine in der Erstreckung jenes Intervalls stetige Funktion, indem die Veränderung der Funktionswerthe um unendlich kleine Werthe als *stetige* Veränderung angesehen wird. Sind ferner diese unendlich kleinen Differenzen der abhängigen Variabeln, die zwei unendlich wenig verschiedenen Argumentwerthen entsprechen, von derselben Ordnung unendlich klein, von der die Differenz der Argumentwerthe unendlich klein ist, welches auch der Prozess sein mag, durch den diese letztere Differenz erzeugt gedacht werden kann, so sind beide unendlich kleinen Differenzen oder Differentiale vergleichbar

und es kann der Werth ihres Verhältnisses durch Bestimmung des Differentialquotienten nach den Regeln der Differentialrechnung ermittelt werden. Alsdann ist die stetige Funktion zugleich für ein Intervall der Argumentwerthe differentiirbar, wenn nämlich die eben angegebene Bedingung für jeden beliebigen Argumentwerth jenes Intervalls erfüllt ist. Man sieht, dass der Begriff einer stetigen Funktion, deren Stetigkeit ja mit der durch Bewegung anschaulichen Stetigkeit der Veränderung geometrischer Gebilde nichts gemein hat und daher zur besseren Unterscheidung analytische Stetigkeit genannt werden mag, ein weit allgemeinerer Begrift ist als der Begriff einer differentiirbaren Funktion, da unendlich kleine Werthe von der verschiedensten Ordnung unendlich klein und also nicht vergleichbar sein können. Rein analytisch betrachtet kann darum das Vorkommen von stetigen, aber nicht differentiirbaren Funktionen, wie solche von Weierstrass zuerst aufgestellt wurden,*) nicht das mindeste Räthselhafte bieten; bei der hier gegebenen Darlegung muss ja ihre Existenz a priori zum mindesten als möglich angesehen werden; allerdings nur als möglich, denn es könnte der Fall sein, dass die Nichtdifferentiirbarkeit nicht durchweg eine Stetigkeit der Funktion erlauben würde, wie ja auch thatsächlich das von Weierstrass gegebene Beispiel eine nur für reelle Werthe des Arguments stetige Funktion darstellt.

§ 23. Neben dem Studium der Form, die eine Funktion besitzen kann, und der Mannigfaltigkeiten, die durch sie in wechselweise Abhängigkeit gesetzt werden, bleibt als besonderer Gegenstand funktionentheoretischer Untersuchungen die Beziehung zwischen der Form und der durch diese aus den unabhängigen Mannigfaltigkeiten abgeleiteten abhängigen Mannigfaltigkeit von Zahlen.

Im allgemeinen wird jeder Mannigfaltigkeit eine Form, jeder Form eine Mannigfaltigkeit von Funktionswerthen zugehören. Insbesondere können mehrere Formen dieselbe Mannigfaltigkeit darstellen; es sind dies dann „aequivalente Formen.“ Es können auch mehrere Mannigfaltigkeiten von Werthmengen, von denen nicht die eine als Fortsetzung der andern angesehen werden kann, durch eine und dieselbe Form dargestellt werden. Es kann eine Form beliebig ge-

*) Borchardt's Journal Bd. 79, pag. 30; und Abhandlungen aus der Funktionenlehre 1886; pag. 92.

geben sein und alsdann die durch sie bestimmte Mannigfaltigkeit untersucht werden, die in Ausnahmefällen lediglich aus unendlich kleinen oder unendlich grossen Werthen bestehen und dann als „ausgeartete Mannigfaltigkeit“ bezeichnet werden kann. Es wird sich ferner nothwendig erweisen allgemeine Formen zu suchen, in der beliebige, nur durch allgemeine Eigenschaften charakterisirte Werthmengen eine Darstellung finden können, wie beispielsweise jede analytisch stetige, sonst aber beliebige Folge von reellen Werthen durch Fourier'sche Reihen der Mannigfaltigkeit der reellen Argumentwerthe zugeordnet werden kann. Als „willkührliche Funktionen“ werden solche nur durch allgemeinste Eigenschaften charakterisirte Zuordnungen von Werthmengen bezeichnet. Ist eine solche vollständige Darstellung der Zuordnungen, die als gegeben gedacht werden, zunächst nicht möglich, so müssen doch Formen gesucht werden, welche wenigstens für einen Theil der zugeordneten Werthmengen die Zuordnung vermitteln. So kommt man zu „approximativen Formen“, die als Darstellungen der gegeben gedachten Zuordnungen betrachtet nur für ein abgegrenztes Gebiet der Variabeln Geltung haben. Als solche „approximative“ Formen können Potenzreihen betrachtet werden, die eine vorgegebene Abhängigkeit nur innerhalb des Convergenzbereichs, den die Reihe besitzt, darstellen. Die von Weiherstrass sogenannten „analytischen Funktionen“ sind solche Abhängigkeiten von Werthmengen, deren Form für einzelne Gebiete der Variabeln durch ein System ineinander fortsetzbarer Potenzreihen gegeben werden kann. Schliesslich wird zu beachten sein, in welcher Weise sich besondere Eigenthümlichkeiten der Form einer Funktion in den durch sie einander zugeordneten Mannigfaltigkeit spiegeln und in welchen besonderen Formen sich die Besonderheiten ausdrücken lassen, die man von vorn herein in den Zuordnungen der Mannigfaltigkeiten annehmen kann.

§ 24. Die Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Form und der durch sie einander zugeordneten Mannigfaltigkeiten zeigt sich als nothwendig, da nur beide Merkmale zusammen, wie die frühere Untersuchung gezeigt hat, den Inhalt des mathematischen Funktionsbegriffs constituiren. Freilich würde nichts hindern, zwei Begriffe zu bilden, von denen der eine blos das Merkmal der Form, der andere blos das Merkmal der Zuordnung von Mannigfaltigkeiten besitzt;

so käme man zu den anfangs (pag. 6 und 7) gegebenen, völlig verschiedenen Definitionen des Funktionsbegriffs im Sinne Eulers und im Sinne Dirichlets. Es zeigt aber die nunmehr zu Ende geführte, in ihrem Verlauf lediglich durch logische Rücksichten bestimmte Untersuchung, dass beide Merkmale ihrer Natur nach zu dem einen vollständigen, logisch nothwendigen Begriff der mathematischen Funktion sich vereinigen.

Ich bin geboren am 6. August 1865 zu Albersweiler in der Rheinpfalz als Sohn des protestantischen Pfarrers Theodor Lipps. Meine Gymnasialbildung erhielt ich in Zweibrücken. Im Herbst des Jahres 1883 bezog ich die Universität Leipzig als Student der Mathematik. Später setzte ich in München die in Leipzig begonnenen Studien fort; kehrte jedoch wieder nach Leipzig zurück, woselbst ich mich im Januar 1887 zum mathematischen Staatsexamen meldete, das im August desselben Jahres seinen Abschluss fand. Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren: Bauer, Bruns, Dyck, Hankel, Klein, Lie, Mayer, v. d. Mühll, Neumann, Pringsheim, Schur, Seeliger, Seydel, Springer, Wundt. Ich werde ihnen stets zu grösstem Danke verpflichtet sein.

G. Lipps.

